NOTES DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS ET NOTES PRÉSENTÉES OU TRANSMISES PAR LEURS SOINS

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Minimalité des réels définis par « forcing » sur certaines familles d'arbres de suites finies d'entiers.* Note (*) de M. **Serge Grigorieff**, présentée par M. Jean Leray.

Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de ZF plus l'axiome du choix. On note σ (N) l'ensemble des suites finies d'entiers que l'on ordonne par la relation $\subset$ de prolongement de suites. On appelle arbre toute partie non vide A de σ (N) qui est close par restriction de suites; si $s \in \mathrm{A}$ on pose

$$\mathrm{A}\,|\,s = \{ t \in \mathrm{A};\; t \subset s \text{ ou } t \supset s \}.$$

Si $s \in \sigma(\mathrm{N})$, $s : k \to \mathrm{N}$, si $a \in \mathrm{N}$, on note $s \bigstar a$ la suite de domaine $k+1$ qui prolonge s et dont la valeur au point k est a.

Un arbre A est dit superparfait si

$$(\forall s \in \mathrm{A})(\exists t \in \mathrm{A})(t \supset s \text{ et } \{ n;\; t \bigstar n \in \mathrm{A} \} \text{ est infini}).$$

On désigne par P la famille des arbres superparfaits (dans $\mathfrak{M}$) ordonnée par inclusion. Nous montrons dans cette Note que, si G est une partie $\mathfrak{M}$ —générique de P, il n'y a pas de modèle intermédiaire entre $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}$ [G]. Une généralisation de ce résultat est ensuite considérée, qui fait intervenir la notion d'arbre J-superparfait, J étant un idéal sur $\mathscr{P}$ (N).

1. Forcing avec les arbres superparfaits. — On introduit une notion de fusion analogue à celle de (2).

Définition 1. — Une famille $(\mathrm{A}_s)_{s \in \sigma(\mathrm{N})}$ est dite fusionnable si

(i) $(\forall s, t \in \sigma(\mathrm{N}))\,(s \subset t \Rightarrow \mathrm{A}_s \supset \mathrm{A}_t)$;

(ii) $(\forall s \in \sigma(\mathrm{N}))\,(\exists t \in \mathrm{A}_s)\,(\exists h : \mathrm{N} \to \mathrm{N})$ [h est strictement croissante et

$$\forall n (\mathrm{A}_{s \bigstar n} \subset \mathrm{A}_s \,|\, t \bigstar h(n))].$$

Lemme 2. — *Si la famille* $(\mathrm{A}_s)_{s \in \sigma(\mathrm{N})}$ *est fusionnable alors l'ensemble* $\mathrm{B} = \bigcap_n \bigcup_{s \in \mathrm{N}^n} \mathrm{A}_s$ *est un arbre superparfait.*

Preuve. — Il existe deux fonctions $\mathrm{T} : \sigma(\mathrm{N}) \to \sigma(\mathrm{N})$ et $\mathrm{H} : \sigma(\mathrm{N}) \to \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$ telles que, pour tout s, T (s) et H (s) ont les propriétés de t et h de (ii) (déf. 1). On voit par induction que T (s) a une longueur au moins égale à celle de s; aussi, $\mathrm{T}(s) \in \mathrm{A}$. Soit $u \in \mathrm{A} \cap \mathrm{N}^n$, il existe $s \in \mathrm{N}^n$ et $a \in \mathrm{N}$ tels que $u \in \mathrm{A}_{s \bigstar a}$; comme

$$\mathrm{A}_{s \bigstar a} \subset \mathrm{A}_s \,|\, \mathrm{T}(s) \bigstar \mathrm{H}(s)(n)$$

et T (s) a une longueur au moins égale à n, on voit que $u \subset \mathrm{T}(s)$. Ainsi, on a

$$\mathrm{B} = \{ u \in \sigma(\mathrm{N});\; \exists s \in \sigma(\mathrm{N})\, u \subset \mathrm{T}(s) \}.$$

Pour tout s on a $\mathrm{T}(s \bigstar n) \supset \mathrm{T}(s) \bigstar \mathrm{H}(s)(n)$; par suite $\{ a \in \mathrm{N};\; \mathrm{T}(s) \bigstar a \in \mathrm{A} \}$, qui est aussi l'image de H (s), est un ensemble infini et B est ainsi un ensemble superparfait.

Théorème 3. — *Soit* G *une partie* $\mathfrak{M}$*-générique de* P. *Il n'existe pas de modèle intermédiaire entre* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{M}$ [G], *i. e. pour tout* $f \in \mathfrak{M}$ [G], *soit* $f \in \mathfrak{M}$, *soit* $\mathfrak{M}[f] = \mathfrak{M}[\mathrm{G}]$.

Il suffit de prouver le théorème pour f inclus dans $\mathfrak{M}$. Soit donc $f : \mathrm{D} \to \{0, 1\}$ un élément de $\mathfrak{M}[\mathrm{G}]$ non dans $\mathfrak{M}$, où $\mathrm{D} \in \mathfrak{M}$. On désigne par $\underline{f}$ une notation de f dans $\mathfrak{M}$ et on suppose que $\sigma(\mathrm{N})$ force « $\underline{f}$ est une fonction de $\underline{\mathrm{D}}$ dans $\{0, 1\}$ ».

LEMME 4. — *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{P}$ *tel que* $\mathrm{A} \mid \vdash \underline{f} \notin \mathfrak{M}$, *et soit* $u \in \mathrm{A}$ *telle que* $\mathrm{X} = \{n;\ u \bigstar n \in \mathrm{A}\}$ *est infini. Il existe* $\alpha \in \mathrm{D}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $h : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$, *strictement croissante, et une suite* $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{N}}$ *d'éléments de* P *tels que, pour tout* i,

$$\mathrm{A}_i \subset \mathrm{A} \mid u \bigstar h(i),\ \mathrm{A}_0 \mid \vdash \underline{f}(\alpha) = \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_{i+1} \mid \vdash \underline{f}(\alpha) = 1 - \varepsilon.$$

Preuve. — On a $\mathrm{A} \mid \vdash \underline{f} \notin \mathfrak{M}$, donc aussi $\mathrm{A} \mid u \mid \vdash \underline{f} \notin \mathfrak{M}$. Par suite, il existe $\alpha \in \mathrm{D}$ tel que $\mathrm{A} \mid u$ ne décide pas $\underline{f}(\alpha)$. Soient A' et A'' inclus dans $\mathrm{A} \mid u$ qui décident différemment $\underline{f}(\alpha)$, on peut supposer que $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A} \mid u \bigstar m'$ et $\mathrm{A}'' \subset \mathrm{A} \mid u \bigstar m''$ avec m', $m'' \in \mathrm{X}$. Pour $i \in \mathrm{X}$, $i > \sup(m', m'')$, soit $\mathrm{A}'_i \subset \mathrm{A} \mid u \bigstar i$ qui décide $\underline{f}(\alpha)$; il existe $\varepsilon \in \{0, 1\}$ tel que l'ensemble Y de ces i qui forcent « $\underline{f}(\alpha) = 1 - \varepsilon$ » est infini. Soit A_0 celui de A' ou A'' qui force « $\underline{f}(\alpha) = \varepsilon$ ». On définit $h : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$ ainsi : $h(0) = m'$ ou m'' selon que $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}'$ ou A'', $h \upharpoonright \mathrm{N} - \{0\}$ énumère de façon croissante les éléments de Y. Les conclusions du lemme sont alors vérifiées si l'on pose $\mathrm{A}_i = \mathrm{A}'_{h(i)}$ pour $i > 0$.

LEMME 5. — *Sous les hypothèses du lemme* 4 *il existe* $\beta \in \mathrm{D}^{\mathrm{N}}$, $\theta \in \{0, 1\}^{\mathrm{N}}$, $l : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$, *strictement croissante, et une suite* $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{N}}$ *d'éléments de* P *tels que, pour tout* $i, j \in \mathrm{N}$,

$$\mathrm{A}_i \subset \mathrm{A} \mid u \bigstar l(i), \qquad \mathrm{A}_i \mid \vdash \underline{f}(\beta(i)) = \theta(i) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_{i+1+j} \mid \vdash \underline{f}(\beta(i)) = 1 - \theta(i).$$

Preuve. — Écrivons les α, ε, h et A_i du lemme 4 sous la forme fonctionnelle $\alpha(\mathrm{A}, u)$, $\varepsilon(\mathrm{A}, u)$, $h(\mathrm{A}, u)$ et $\mathscr{A}(\mathrm{A}, u, i)$. On définit par induction des arbres B_n et B_n^i, n et i variant dans N :

$$\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}, \qquad \mathrm{B}_n^i = \mathscr{A}(\mathrm{B}_n, u, i) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_{n+1} = \bigcup \{\mathrm{B}_n^i;\ i > 0\}.$$

On pose alors

$$\beta(n) = \alpha(\mathrm{B}_n, u), \qquad \theta(n) = \varepsilon(\mathrm{B}_n, u), \qquad l(n) = h(\mathrm{B}_n, u)(0) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n^0$$

qui satisfont les conclusions du lemme.

On déduit facilement du lemme 5 le lemme suivant :

LEMME 6. — *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{P}$ *qui force* « $\underline{f} \notin \mathfrak{M}$ ». *Il existe* $\alpha : \sigma(\mathrm{N}) \to \mathrm{D}$, $\varepsilon : \sigma(\mathrm{N}) \to \{0, 1\}$, $h : \sigma(\mathrm{N}) \to \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$, $\mathrm{T} : \sigma(\mathrm{N}) \to \sigma(\mathrm{N})$ *et* $(\mathrm{A}_s)_{s \in \sigma(\mathrm{N})}$ *tels que, pour tout* s, $\mathrm{T}(s) \in \mathrm{A}_s$, $\{n;\ \mathrm{T}(s) \bigstar n \in \mathrm{A}_s\}$ *est infini*, $h(s)$ *est une fonction strictement croissante de* N *dans* $\{n;\ \mathrm{T}(s) \bigstar n \in \mathrm{A}_s\}$, $\mathrm{A}_\varnothing = \mathrm{A}$,

$$\mathrm{A}_{s \bigstar i} \subset \mathrm{A}_s \mid \mathrm{T}(s) \bigstar h(s)(i), \qquad \mathrm{A}_{s \bigstar i} \mid \vdash \underline{f}(\alpha(s \bigstar i)) = \varepsilon(s \bigstar i)$$

et

$$\mathrm{A}_{s \bigstar (i+1+j)} \mid \vdash \underline{f}(\alpha(s \bigstar i)) = 1 - \varepsilon(s \bigstar i).$$

On peut alors achever la preuve du théorème 3. La connaissance de G équivaut à celle du réel

$$g = \cup \{s \in \sigma(\mathrm{N});\ \sigma(\mathrm{N}) \mid s \in \mathrm{G}$$

(on peut voir, en effet, que $G = \{ A \in P ; \forall n g \upharpoonright n \in A \}$). On se ramène donc à montrer que $g \in \mathfrak{M}[f]$. A chaque $A \in P$ qui force « $f \notin \mathfrak{M}$ » le lemme 6 associe une famille fusionnable de A_s et donc un arbre $B = \bigcap_n \bigcup_{s \in N^n} A_s$ qui est inclus dans A. Par un argument de densité, il existe de tels A, B dans G. On a noté dans la preuve du lemme 2 que $B = \{ t ; \exists s t \subset T(s) \}$. Pour connaître g il suffit alors de connaître la fonction $\tilde{g} : N \to N$ telle que $\forall n\, T(\tilde{g} \upharpoonright n) \subset g$. Or, du lemme 6 on déduit que $\tilde{g}(n) =$ l'unique i tel que

$$(\forall j < i)(f(\alpha(\tilde{g} \upharpoonright n \bigstar j)) = 1 - \varepsilon(\tilde{g} \upharpoonright n \bigstar j)) \quad \text{et} \quad f(\alpha(\tilde{g} \upharpoonright n \bigstar i)) = \varepsilon(\tilde{g} \upharpoonright n \bigstar i).$$

Ceci montre que $\tilde{g} \in \mathfrak{M}[f]$, ce qui prouve le théorème 3.

Remarque 7. — Les arbres superparfaits ont une interprétation topologique simple. Un point x d'un sous-espace P de N^N est dit K_σ-isolé s'il existe un voisinage V de P tel que $V \cap P$ est inclus dans une partie K_σ de N^N. Une partie P de N^N est dite superparfaite si elle est fermée sans point K_σ isolé. A un arbre A s'associe une partie fermée de N^N :

$$[A] = \{ f \in N^N ; \forall n f \upharpoonright n \in A \};$$

toute partie fermée s'obtient ainsi, et les parties superparfaites sont exactement celles obtenues à partir des arbres superparfaits.

Dans le modèle de Sacks [2] toute partie de N non dans le modèle de base provient d'un filtre générique sur la famille des parties parfaites de 2^N; dans le modèle considéré ici un résultat analogue est valide :

PROPOSITION 8. — *Dans* $\mathfrak{M}[G]$, *les fonctions de* N *dans* N *qui proviennent de parties* $\mathfrak{M}$*-génériques de* P *sont exactement les fonctions non majorées dans* $\mathfrak{M}$.

La proposition 8 s'établit à partir du lemme suivant :

LEMME 9. — *Soit* $A \in P$ *qui force* « $\underline{f}$ *n'est pas majorée dans* $\mathfrak{M}$ ». *Il existe* $u \in A$ *tel que* $X = \{ n ; u \bigstar n \in A \}$ *est infini, il existe* $k \in N$, $h : N \to X$, $l : N \to N$, *h strictement croissante et l injective, et une suite* $(A_i)_{i \in N}$ *d'éléments de* P *tels que, pour tout i,* $A_i \subset A \mid u \bigstar h(i)$ *et* $A_i \mid\vdash \underline{f}(k) = l(i)$.

Note. — Puisque $\mathfrak{M}[G]$ contient des éléments de N^N non majorés dans $\mathfrak{M}$, il ne coïncide pas avec un modèle de Sacks [2].

2. FORCING AVEC LES ARBRES J-SUPERPARFAITS. — Soit J un idéal de $\mathscr{P}(N)$, un arbre est dit J-superparfait si

$$(\forall s \in A)(\exists t \in A)(t \supset s \text{ et } \{ n ; t \bigstar n \in A \} \notin J).$$

On note P (J) la famille des arbres J-superparfaits ordonnée par inclusion. La notion de famille J-fusionnable s'obtient en ajoutant à la définition 1 la condition « h a une image non dans J ». Les lemmes 2 et 4 sont alors vrais (en ajoutant la condition précédente dans la conclusion du lemme 4). On a également :

LEMME 10. — *Soit* $Z = \{ n$; *il existe* α, ε, h *et des* A_i *tels qu'au lemme 4 et* $h(0) = n \}$, *alors* $Z \subset X$ *et* $X - Z \in J$.

Preuve. — Sinon $A' = \cup \{ A \mid u \bigstar n ; n \in X - Z \} \in P$ et force aussi « $\underline{f} \notin \mathfrak{M}$ »; le Z' associé à A' doit être vide, ce qui contredit le lemme 4 (appliqué à A').

Le lemme 10 permet de prouver l'analogue du lemme 5 avec la condition « l a une image non dans J » sous l'hypothèse que J est un T-idéal [([1]), § 1] : $l(0)$ peut être choisi dans un ensemble non dans J; ce choix fait, $l(1)$ peut aussi être choisi dans un ensemble non dans J; ...; on obtient ainsi un J-arbre de choix de la suite $l(0)$, $l(1)$, ..., l'hypothèse de T-idéal permet alors de considérer une J-branche qui donne la fonction l cherchée. D'où le théorème suivant qui généralise le théorème 3 :

THÉORÈME 11. — *Soit* J *un* T-*idéal* (*en particulier* J *peut être le dual d'un ultrafiltre sélectif*) *et soit* G *un filtre* $\mathfrak{M}$-*générique sur* P (J). *Il n'existe pas de modèle intermédiaire entre* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{M}$ [G].

Remarque. — On peut montrer que si J est un idéal non sélectif, alors il existe un idéal J′ tel que $\mathfrak{M}$ [G] contient un filtre $\mathfrak{M}$-générique sur P (J′) qui ne reconstruit pas G.

(*) Séance du 7 juillet 1975.

([1]) S. GRIGORIEFF, *Annals of Mathematical Logic*, 3, n° 4, 1971, p. 363-394.

([2]) G. E. SACKS, *Amer. Math. Soc. Symposia*, 13, 1971, p. 331-355.

31, *rue Debelleyme*,
75003 *Paris*.